Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs et autres appareils électroniques similaires, ainsi que les documents sont interdits. La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. On invite donc le candidat à produire des raisonnements clairs, complets et concis. Le candidat peut utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes ; il veillera toutefois à préciser la référence du résultat utilisé.

Introduction, notations et conventions

L'objet de ce problème est l'étude de la transformation intégrale d'Abel considérée comme opérateur sur divers espaces et de son usage pour la résolution d'un problème concret abordé dans la partie III. Les parties III et IV sont indépendantes mais dépendent des propriétés de la transformée d'Abel définie dans les parties I et II.

On rappelle que si E et F sont deux $\mathbb{C}-$espaces normés, dont les normes sont respectivement notées $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$, et si $T : E \to F$ est une application linéaire, alors T est continue sur E si, et seulement si, il existe une constante positive C telle que

$$\forall f \in E, \qquad \|Tf\|_F \leqslant C\|f\|_E,$$

et on appelle norme de T, notée $|||T|||$, la plus petite des constantes C pour lesquelles cette inégalité a lieu.
Une application linéaire continue entre deux espaces normés sera appelée un opérateur.

Si $T : E \to F$ est une application linéaire, on définit son image comme

$$\mathrm{Im}(T) = T(E) = \{Tf,\, f \in E\},$$

et son noyau comme

$$\mathrm{Ker}(T) = \{f \in E,\, Tf = 0\}.$$

De même si B est une partie de F, on définit

$$T^{-1}(B) = \{f \in E,\, Tf \in B\}.$$

Pour I intervalle de $\mathbb{R}$, on note $C^0(I)$ (respectivement $C^1(I)$) l'espace des fonctions à valeurs complexes et continues sur l'intervalle I (respectivement de classe C^1 sur l'intervalle I).

Les espaces de Banach que nous considérerons dans ce problème sont :

– l'espace $C^0([0,1])$, muni de la norme uniforme :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

– pour I, intervalle de $\mathbb{R}$, et $p \in [1, +\infty[$, nous noterons $\mathcal{L}^p(I)$ l'espace des fonctions $f : I \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, Lebesgue-mesurables et telles que $\int_I |f(t)|^p \mathrm{d}t$ soit finie. Nous désignerons par $L^p(I)$ l'espace quotient de $\mathcal{L}^p(I)$ par la relation d'égalité presque partout. On confondra systématiquement un élément de l'espace $L^p(I)$ avec l'un de ses représentants dans l'espace $\mathcal{L}^p(I)$. La norme sur l'espace $L^p(I)$ est :

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}.$$

On rappelle que si α est un réel strictement positif alors on peut définir

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$$

On a alors $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ et pour tout entier positif n, $\Gamma(n+1) = n!$.
Pour α, β des réels strictement positifs, on admettra la formule classique suivante :

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1}t^{\beta-1}\mathrm{d}t.$$

Si $A \subset \mathbb{R}$ est un ensemble borélien on notera 1_A sa fonction indicatrice, définie par

$$1_A(x) = 1 \text{ si } x \in A \text{ et } 1_A(x) = 0 \text{ sinon}.$$

Tournez la page S.V.P.

I Transformation intégrale d'Abel

A– Transformée d'Abel dans $C^0([0,1])$ et dans $C^1([0,1])$

1. (a) Pour $x \in [0,1[$, montrer la convergence et calculer l'intégrale

$$\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t-x}}.$$

   (b) En déduire, pour $f \in C^0([0,1])$, que l'intégrale

$$\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}\mathrm{d}t$$

   est convergente et que

$$\lim_{x\to 1} \int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}\mathrm{d}t = 0.$$

Pour $f \in C^0([0,1])$, on définit alors la fonction $Af : [0,1] \to \mathbb{C}$ par $Af(1) = 0$ et pour tout $x \in [0,1[$ par

$$Af(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}\mathrm{d}t.$$

2. Pour $x \in [0,1[$, montrer que

$$Af(x) = \sqrt{1-x}\int_0^1 \frac{f(x+(1-x)u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u.$$

3. En déduire que Af appartient à $C^0([0,1])$ et que $A : f \mapsto Af$ est un opérateur de $C^0([0,1])$ dans lui-même dont on déterminera la norme.

4. On suppose dans cette question que $f(1) \neq 0$.
   (a) Donner un équivalent de $Af(x)$ au voisinage de 1. $\sim 2 f(1)\sqrt{1-x}$
   (b) En déduire que Af n'est pas dérivable en 1.

5. On suppose dans cette question que f est de classe C^1 sur $[0,1]$.
   (a) Montrer que Af est de classe C^1 sur $[0,1[$.
   (b) On suppose de plus que $f(1) = 0$, montrer que Af est de classe C^1 sur $[0,1]$.

I Transformation intégrale d'Abel

A– Transformée d'Abel dans $C^0([0,1])$ et dans $C^1([0,1])$

1. (a) Pour $x \in [0,1[$, montrer la convergence et calculer l'intégrale
$$\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t-x}}.$$
   (b) En déduire, pour $f \in C^0([0,1])$, que l'intégrale
$$\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}\mathrm{d}t$$
   est convergente et que
$$\lim_{x \to 1} \int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}\mathrm{d}t = 0.$$

Pour $f \in C^0([0,1])$, on définit alors la fonction $Af : [0,1] \to \mathbb{C}$ par $Af(1) = 0$ et pour tout $x \in [0,1[$ par
$$Af(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}\mathrm{d}t.$$

2. Pour $x \in [0,1[$, montrer que
$$Af(x) = \sqrt{1-x}\int_0^1 \frac{f(x+(1-x)u)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u.$$

3. En déduire que Af appartient à $C^0([0,1])$ et que $A : f \mapsto Af$ est un opérateur de $C^0([0,1])$ dans lui-même dont on déterminera la norme.

4. On suppose dans cette question que $f(1) \neq 0$.
   (a) Donner un équivalent de $Af(x)$ au voisinage de 1. $\sim 2f(1)\sqrt{1-x}$
   (b) En déduire que Af n'est pas dérivable en 1.

5. On suppose dans cette question que f est de classe C^1 sur $[0,1]$.
   (a) Montrer que Af est de classe C^1 sur $[0,1[$.
   (b) On suppose de plus que $f(1) = 0$, montrer que Af est de classe C^1 sur $[0,1]$.

B– La formule d'inversion

1. Soient a, b deux réels tels que $a < b$. Montrer que

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(b-t)(t-a)}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u(1-u)}} = \pi.$$

Pour $f \in C^0([0,1])$, on définit la fonction Vf de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ par $Vf(x) = \displaystyle\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$.

2. Montrer que $V : f \mapsto Vf$ est un opérateur de $C^0([0,1])$ dans lui-même et calculer sa norme.

3. Montrer l'égalité d'opérateurs de $C^0([0,1])$: $A \circ A = \pi V$.
(*Indication : on pourra utiliser I.B.1.*)

4. En déduire que l'opérateur A est injectif sur $C^0([0,1])$.

5. (a) Déterminer l'image de l'opérateur V de $C^0([0,1])$, notée $\mathrm{Im}(V)$.
   (b) En déduire que : $\mathrm{Im}(A) = A^{-1}\left(C^1([0,1])\right)$.
   (c) Montrer que toute fonction $g \in C^1([0,1])$ telle que $g(1) = 0$ appartient à $\mathrm{Im}(A)$.

6. Soit $g \in \mathrm{Im}(A)$. Montrer que l'unique fonction $f \in C^0([0,1])$ telle que $Af = g$ est donnée par

$$f = -\frac{1}{\pi}(Ag)',$$

où $(Ag)'$ désigne la fonction dérivée de Ag.

C– Un semi-groupe d'opérateurs

1. Soit α un réel strictement positif.
   (a) En s'inspirant de la section I.A, montrer que pour $f \in C^0([0,1])$, on peut définir une fonction $V^\alpha f : [0,1] \to \mathbb{C}$ par $V^\alpha f(1) = 0$ et pour tout $x \in [0,1[$ par

$$V^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^1 (t-x)^{\alpha-1} f(t)\mathrm{d}t.$$

   (b) Montrer que l'application $V^\alpha : f \mapsto V^\alpha f$ est un opérateur de $C^0([0,1])$ dans lui-même.

2. Montrer la propriété de semi-groupe, pour α, β des réels strictement positifs,

$$V^{\alpha+\beta} = V^\alpha \circ V^\beta.$$

Tournez la page S.V.P.

3. Pour $\alpha = n$, un entier strictement positif, montrer l'égalité d'opérateurs de $C^0([0,1])$:

$$V^\alpha = V \circ \ldots \circ V$$

(composée n fois), où V est l'opérateur introduit en I.B.2.

4. Montrer l'égalité d'opérateurs de $C^0([0,1])$: $A = \sqrt{\pi} V^{1/2}$.

II La transformée d'Abel et les espaces L^p

Dans cette partie p désigne un réel de l'intervalle $[1, +\infty[$.

1. Soit $h \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\|h\|_1 = 1$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer l'inégalité suivante :

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} |f(t)||h(x-t)| \mathrm{d}t \right|^p \mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p |h(x-t)| \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x.$$

   (b) En déduire que si $g \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) g(x-t) \mathrm{d}t$$

   existe pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ et que $f * g : x \mapsto (f * g)(x)$ définit une fonction appartenant à $L^p(\mathbb{R})$ et telle que

$$\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_p \|g\|_1.$$

Pour $f \in L^1([0,1])$, on note $E(f)$ la fonction de $L^1(\mathbb{R})$ qui coïncide avec f sur l'intervalle $[0,1]$ et qui vaut 0 en dehors de cet intervalle. On définit aussi la fonction r de $L^1(\mathbb{R})$ en posant

$$r(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}} 1_{]-1,0[}(x).$$

2. Pour $f \in C^0([0,1])$ et $x \in [0,1]$, montrer que

$$Af(x) = (E(f) * r)(x).$$

3. (a) Montrer que A et V se prolongent de façon unique en des opérateurs de $L^p([0,1])$ dans lui-même. On note encore A et V ces prolongements.

(b) Montrer que si $f \in L^p([0,1])$ alors on a, pour presque tout x de $[0,1]$,

$$Af(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad Vf(x) = \int_x^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

4. Pour ε réel strictement positif, on définit la fonction $\varphi_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R})$ par

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

où $x \in \mathbb{R}$ et $\varphi(x) = 1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x)$.

(a) Montrer que si $f \in \mathrm{Ker}(V)$, où V est considéré comme un opérateur de $L^p([0,1])$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $E(f) * \varphi_\varepsilon = 0$.

(b) En déduire que les opérateurs V et A de $L^p([0,1])$ sont injectifs.

(c) L'opérateur A, de $L^p([0,1])$ dans lui-même, est-il surjectif ?

5. Dans cette question, on suppose que $p > 2$ et on note $q = \frac{p}{p-1}$.

(a) Montrer que $r \in L^q(\mathbb{R})$.

(b) Pour $x \in \mathbb{R}$, notons $\tau_x r$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\tau_x r(t) = r(x-t)$. Montrer que l'application $x \mapsto \tau_x r$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $L^q(\mathbb{R})$.

(c) Montrer que l'opérateur A est continu de $L^p([0,1])$ dans $C^0([0,1])$.

(d) On note B_p la boule unité fermée de $L^p([0,1])$. À l'aide du théorème d'Ascoli, prouver que $A(B_p)$ est une partie de l'espace $C^0([0,1])$ d'adhérence compacte.

6. Dans cette question on se propose de montrer que la conclusion de la question précédente est fausse pour $1 \leqslant p \leqslant 2$. Pour λ réel strictement positif, on définit la fonction f_λ par

$$f_\lambda(t) = \left(t(-\ln t)^\lambda\right)^{-1/2} 1_{]0,1/2]}(t).$$

(a) Pour quelles valeurs de $\lambda > 0$, f_λ est-elle dans $L^2([0,1])$?

(b) Montrer que si $0 < \lambda < 2$ alors $Af_\lambda(x) \to +\infty$ quand $x \to 0$.
(*Indication : on pourra utiliser le lemme de Fatou.*)

(c) En déduire l'existence d'une fonction f de $L^2([0,1])$ telle que Af n'est pas dans $C^0([0,1])$.

À partir de la question qui suit et jusqu'à la fin du problème, les opérateurs A, V seront toujours considérés comme agissant sur $L^1([0,1])$. On note $|||\cdot|||$ la norme d'opérateurs sur $L^1([0,1])$.

7. (a) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} |||V^n|||^{\frac{1}{n}} = 0$.

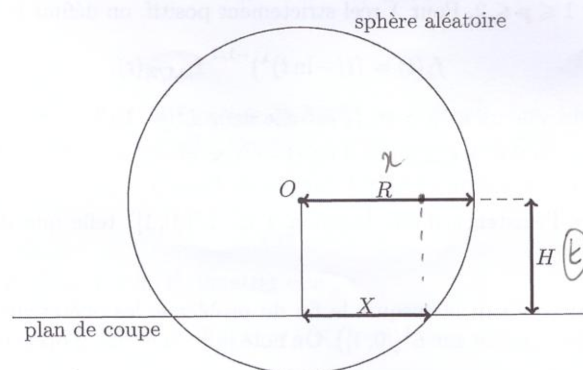
(b) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} |||A^n|||^{\frac{1}{n}} = 0$.

8. On note I l'opérateur identité de $L^1([0,1])$. Déduire de la question précédente que pour tout réel $t \neq 0$, les opérateurs $tI + A$ et $tI + V$ sont inversibles et exprimer leurs inverses à l'aide d'une série.

III Sphères aléatoires

On s'intéresse à l'étude d'un milieu opaque où se développent des sphères de centres et rayons aléatoires (on peut penser par exemple à des trous dans un gruyère). Nous souhaiterions estimer la loi de distribution des rayons, mais pour cela nous ne pouvons pas observer directement ces sphères. En revanche, nous pouvons couper régulièrement le milieu par des plans et observer les rayons des cercles d'intersection des sphères avec les plans de coupe.

On modélise le problème en introduisant une variable aléatoire R, ayant pour loi la loi des rayons des sphères. On fait l'hypothèse que cette loi est à densité $f \in L^1([0,1])$.
On considère de plus une variable aléatoire H indépendante de R et suivant une loi uniforme sur $[0,1]$.
On coupe la sphère aléatoire $\mathcal{S}$ de centre $O \in \mathbb{R}^3$ et de rayon R par un plan aléatoire $\mathcal{P}$ à distance H de O et on désigne par X le rayon du cercle $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}$, en convenant que $X = 0$ si $H \geqslant R$.
Le dessin ci-dessous représente la situation d'une sphère et un plan de coupe. Le dessin est fait dans un plan perpendiculaire au plan de coupe et contenant le centre de la sphère.



L'objet de cette partie est d'établir le lien entre la loi de R et la loi de X.

1. Déterminer la loi du couple (R, H).

2. Calculer la probabilité $P(X = 0)$.

3. Pour $x \in [0, 1]$, montrer que la probabilité de l'évènement $\{X > x\}$ est donnée par :

$$P(X > x) = \int_x^1 \sqrt{r^2 - x^2} f(r)\mathrm{d}r.$$

Pour $h \in L^1([0, 1])$ on pose $\tilde{h}$ la fonction définie presque partout par $\tilde{h}(x) = \frac{h(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$.

4. Montrer que $h \mapsto \tilde{h}$ est un isomorphisme isométrique de $L^1([0, 1])$.

5. (a) Soit ψ la fonction définie pour presque tout $u \in [0, 1]$ par $\psi(u) = u \int_u^1 \frac{f(r)dr}{\sqrt{r^2-u^2}}$. Montrer que $\psi \in L^1([0, 1])$.

   (b) Montrer que la probabilité $P(X > x)$ s'écrit aussi

$$P(X > x) = \int_x^1 \psi(u)\mathrm{d}u.$$

   (*Indication : on pourra utiliser l'égalité suivante, que l'on ne demande pas de démontrer : pour* $0 \leqslant x < r \leqslant 1$ $\sqrt{r^2 - x^2} = \int_x^r \frac{udu}{\sqrt{r^2-u^2}}$)

   (c) Montrer que la loi de X est la mesure P_X sur $[0, 1]$ définie par :

$$P_X = P(X = 0)\delta_0 + \psi(u)\mathrm{d}u,$$

   où δ_0 désigne la masse de Dirac en 0.

6. Établir que $A\tilde{f} = 2\tilde{\psi}$, où A la transformée d'Abel sur $L^1([0, 1])$ définie dans les parties I et II.

7. En déduire que pour presque tout $x \in [0, 1]$ la probabilité de l'évènement $\{R > x\}$ est donnée par

$$P(R > x) = \frac{2}{\pi} A\tilde{\psi}(x^2).$$

On considère à présent une variante du modèle précédent. Au lieu de couper la sphère aléatoire $\mathcal{S}$ de rayon aléatoire R par un plan $\mathcal{P}$ à distance H du centre, on la coupe par la réunion des plans parallèles à $\mathcal{P}$ et à distance de moins de $\varepsilon > 0$ de $\mathcal{P}$. En termes imagés, on coupe une tranche de la sphère $\mathcal{S}$ d'épaisseur 2ε. On retient alors comme variable aléatoire X le plus grand des rayons de $\mathcal{P}' \cap \mathcal{S}$, $\mathcal{P}'$ décrivant l'ensemble des plans parallèles à $\mathcal{P}$ et à distance de moins de ε de ce dernier.

Dans ce nouveau modèle on supposera encore que R, le rayon de la sphère aléatoire $\mathcal{S}$ suit une loi de densité f sur $[0,1]$ mais on suppose maintenant que H suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1+\varepsilon]$.

8. Montrer que la loi de X est encore une mesure P_X sur $[0,1]$ qui s'écrit

$$P_X = P(X=0)\delta_0 + \phi(x)\mathrm{d}x,$$

avec $t = 2\varepsilon$ et

$$2(1+\varepsilon)\tilde{\phi} = (tI + A)\tilde{f}.$$

IV Problèmes bien et mal posés

Soient E, F deux $\mathbb{C}-$ espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire continue et injective. On définit l'application linéaire

$$T^{-1} : \mathrm{Im}(T) \to E.$$

On s'intéresse à l'équation

$$T(f) = g \tag{1}$$

où il s'agit de trouver $f \in E$ connaissant $g \in F$.

Dans la pratique (c'est le cas de l'équation obtenue en III.6) on ne connaît g qu'approximativement et on ne désire pas que de petites variations sur g induisent de grandes variations sur la solution f.

On dira donc que le problème (1) est bien posé si $g \in \mathrm{Im}(T)$ et si T^{-1} est une application linéaire continue, mal posé dans le cas contraire.

Dans le reste du problème l'opérateur A est la transformée d'Abel sur $L^1([0,1])$ définie dans les parties I et II. On écrit $t \mapsto 0^+$ (respectivement $s \mapsto 0^+$), si le réel t (respectivement s) tend vers 0 tout en restant strictement positif.

1. Soit $h \in L^1[0,1]$ et $g = Ah$.
   (a) Montrer que le problème $Af = g$ est mal posé.

(b) Montrer que le problème $(tI + A)f = g$, où t est un réel non nul, est bien posé.

On appelle f_t l'unique solution de ce dernier problème et dans le reste de cette partie, on se propose de montrer que

$$f_t \text{ converge vers } h = A^{-1}g \text{ dans } L^1([0,1]) \text{ lorsque } t \to 0^+. \tag{2}$$

On commence par s'intéresser à la question analogue pour l'opérateur V de $L^1([0,1])$ introduit dans la partie I.

Soit $h \in L^1([0,1])$ et $s > 0$. On note $f_{s,V}$ l'unique solution de l'équation $(sI + V)f_{s,V} = Vh$. On définit la fonction k par $k(x) = e^x 1_{]-\infty,0]}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et on définit la fonction k_s par $k_s(x) = \frac{1}{s}k(\frac{x}{s})$ pour $x \in \mathbb{R}$.

2. (a) Montrer que $y = Vf_{s,V}$ est de classe C^1 et écrire une équation différentielle dont y est solution.
   (b) Montrer que les fonctions $f_{s,V}$ et $E(h) * k_s$ coincident presque partout sur $[0,1]$.
3. En déduire que :
   (a) $\forall s > 0, |||(sI + V)^{-1}V||| \leqslant 1$,
   (b) $\forall s > 0, |||(sI + V)^{-1}||| \leqslant \frac{2}{s}$,
   (c) $f_{s,V} \to h$ dans $L^1([0,1])$ lorsque $s \to 0^+$.
4. En utilisant le théorème des résidus, montrer l'identité suivante, où x, t sont deux réels strictement positifs, et $\alpha \in]0,1[$:
$$\int_0^\infty \frac{s^\alpha \mathrm{d}s}{(s+t^2)(s+x)} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \frac{t^{2\alpha} - x^\alpha}{t^2 - x}.$$

La formule précédente pour $\alpha = 1/2$ peut encore s'écrire :

$$\frac{1}{t + \sqrt{x}} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sqrt{s}\mathrm{d}s}{(s+t^2)(s+x)}. \tag{3}$$

Par le calcul fonctionnel holomorphe on montre (et la démonstration de ce fait n'est pas demandée) que la formule (3) s'étend au cas où x est un opérateur et en particulier que

$$|||(tI + V^{1/2})^{-1}||| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sqrt{s}|||(sI+V)^{-1}|||}{s+t^2}\mathrm{d}s.$$

5. En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que pour tout $t > 0$,
$$|||(tI + A)^{-1}||| \leqslant \frac{C}{t}.$$
   (*Indication : on rappelle* $V^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}A$.)
6. Montrer que si h est dans l'image de A alors f_t converge vers h dans $L^1([0,1])$ lorsque $t \to 0^+$.
7. Conclure dans le cas général.